التباديل: (Permutation): هو عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء مختلفة باخذها من n ويرمز له بالرمز nPr اي تباديل r من n وقانونه الرياضي

مثلا لو اردنا ترتيب خمسة اشخاص في صف واحد فستكون خياراتنا في الاول هي خمسة بينما خياراتنا في وضع الثاني ستكون اختيار واحد من اربعة وكذلك الثالث سيتوجب علينا اختيار واحد من ثلاثة وكذلك في الشخص الرابع سنختار واحد من اثنين اما الاخير فهو واحد فقط ولو مثلناه في جدول كما في ادناه لكان بهذه الطريقة

5	4	3	2	1

اذا عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب خمسة اشخاص هي

$$_{n}P_{r} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

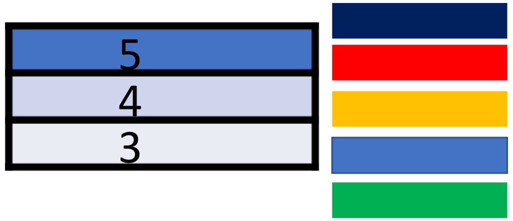
وكذلك ان طبقنا القانون فستكون نفس النتيجة

$$_{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{5!}{1!} = 120$$

اما في حالة اختيار جزء من كل او ترتيب جزء من كل مثلا

مثال: تم شراء خمس اجهزة ولا يتوفر في المخزن الا ثلاثة اماكن فكم طريقة يمكن بها شغل الاماكن الثلاث الفارغة في المخزن.

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}_{5}P_{3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 60$$



الاحتمال من التباديل : المفهوم العام للاحتمال هو كما ياتي

$$P = \frac{\text{الحالة الخاصة}}{\text{الحالة العامة}}$$

مثلا لو كان عندنا فريق من ١١ لاعب ولدينا قمصان مرقمة من ١ الى ١١ اردنا توزيعها عليهم **فما احتمال** ان يكون رقم قميص احمد ١ و محمود ٢. .

في هذه الحالة الترتيب مهم لهذا نختار التباديل

الحالة العامة $= 11!$

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١

الحالة الخاصة=

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	محمود	احمد

$$P\binom{\text{احمد}}{\text{محمود}} = \frac{1 \times 1 \times 9!}{11!} = \frac{9!}{11 \times 10 \times 9!} = \frac{1}{110} = 0.09$$

مثال: يوجد في قسم معين ٢٠ تدريسي فما احتمال ان يتم اختيار فراس رئيسا للقسم و يوسف مقررا له و امجد رئيسا للجنة الامتحانية فيه على الترتيب.

الحالة العامة

20	19	18

الحالة الخاصة :

1	1	1

$$P = \frac{\text{الحالة الخاصة}}{\text{الحالة العامة}} = \frac{1 \times 1 \times 1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{6840} = 0.00015$$

ماذا لو لم يحدد منصب لكل من الاسماء الثلاث اي مثلا ((: يوجد في قسم معين ٢٠ تدريسي فما احتمال ان يتم اختيار فراس و يوسف و امجد للمناصب الثلاث الرئيسية في القسم))

الحالة الخاصة=

3	2	1

$$P = \frac{3 \times 2 \times 1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{6}{6840} = 0.00087$$

مثال: تستعمل الارقام من ١-٩ دون تكرار لعمل بطاقات للطلبة مكونة من ٨ منازل
أ-ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة ؟
ب- اذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائية فما احتمال ان تحمل احد الرقمين 78654328،43256872

الحل: نلاحظ وجود ٩ عناصر و ثمان اماكن لوضعها

الحالة العامة :

9	8	7	6	5	4	3	2

الحالة الخاصة :

2	1

$$P = \frac{\text{الحالة الخاصة}}{\text{الحالة العامة}} = \frac{2 \times 1}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{2}{362880} = 0.000004$$

تباديل مع تكرار

اذا كانت n فيها مجموعة m متشابهة فان عدد الطرق اللازمة لترتيب هذه الاشياء على خط مستقيم (رتل) هو:

$$ {}_{n}P_{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} $$

اما اذا كانت n مكونة من مجموعات مختلفة الاعداد ($m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots \sum m_k = n$) فان عدد طرق ترتيبها سيكون:

$$ {}_{n}P_{m1,m2,\ldots,(n-\sum_{1}^{k-1} m_i)} = \frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots\ldots m_k!} $$

مثال: ما هو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من احرف كلمة statistics

الحل:

عدد الاحرف الكلية $n = 10$	عدد الاحرف $a = m3 = 1$
عدد الاحرف $s = m1 = 3$	عدد الاحرف $c = m4 = 1$
عدد الاحرف $t = m2 = 3$	عدد الاحرف $i = m5 = 2$

نلاحظ تحقق شرط $n = \Sigma m_k$، $3+3+1+1+2 = 10$، عليه

فان عدد الطرق هو $\frac{10!}{3!3!1!1!2!} = \frac{604800*3!}{3!*12} = 50400$ طريقة

مثال: في بعض المسابقات يعطى المتسابق احرفا مبعثرة ويطلب منه تشكيل كلمة منها. فاذا اعطيت الاحرف الاتية وطلب منك تشكيل اسم دولة عربية منها فما هو احتمال ان تكون الكلمة هي العراق.

ا	ل	ق	ع	ر	ا

الحل: نلاحظ وجود تكرارات للحرف (ا)

الحالة العامة :

$$_{n}P_{m} = \frac{n!}{m!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 180$$

الحالة الخاصة :

ا	ل	ع	ر	ا	ق
1	1	1	1	1	1

$$P = \frac{1}{180} = 0.005$$

مثال: تم تكوين عدد من ٦ ارقام عشوائياً باستعمال الارقام ,1,5,2,1,5,3. ما احتمال ان يكون العدد الاول هو 5 والعدد الاخير هو 5 ايضاً.

الحل: نلاحظ وجود تكرارات للعدد (5)

الحالة العامة :

$$_nP_m = \frac{n!}{m!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 180$$

الحالة الخاصة :

5	4	3	2	1	5

$$_nP_m = \frac{n!}{m!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$$

$$P = \frac{12}{180} = 0.066$$

التوافيق Combination : هي عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء يأخذها كلها او بعضها ويرمز له بأحد الرمزين $_nC_r$ **او** $\binom{n}{r}$ وقانونه :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

فمثلا عند اختيار لجنة مؤلفة من 5 اعضاء من بين 9 اشخاص، سيكون عدد طرق اختيار اللجنة هو:

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = 126$$

<u>القواعد الاساسية في التبادل والتوافق</u>

1) اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث E1 هو n ، وعدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث E2 هو m ، وكان الحدثان متنافيان، فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث **<u>E1 او E2</u>** هو (n + m) .

التوافيق Combination : هي عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة اشياء يأخذها كلها او بعضها ويرمز له بأحد الرمزين $_nC_r$ **او** $\binom{n}{r}$ وقانونه :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

فمثلا عند اختيار لجنة مؤلفة من 5 اعضاء من بين 9 اشخاص، سيكون عدد طرق اختيار اللجنة هو:

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = 126$$

<u>القواعد الاساسية في التبادل والتوافيق</u>

1) اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث E1 هو n ، وعدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث E2 هو m ، وكان الحدثان متنافيان، فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث **<u>E1 او E2</u>** هو (n + m) .

مثال: اذا سحبت ورقة عشوائيا من اوراق اللعب، ما هو عدد الطرق الممكنة لسحب ورقة من النوع Spade او النوع Heart

الحل:

Heart	13 ورقة
Diamond	13 ورقة
Club	13 ورقة
Spade	13 ورقة
المجموع	52 ورقة

بذلك يكون عدد الطرق للحصول على **أي ورقة** من النوعين هو:

13+13 = 26 طريقة

2) اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث E1 هو n ، وعدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث E2 هو m ، وكان الحدثان مستقلان، فان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحدث <u>**E1 و E2**</u> هو (m * n) من الطرق .

مثال: اذا سحبت ورقتان من مجموعة اوراق اللعب بحيث ان احدها (سنك Spade) والاخرى (قلب Heart)، ما هو عدد الطرق الممكنة لعمل تلك التشكيلة؟

الحل: 13*13= 161 طريقة

مثال (2): صندوق فيه كرات مختلفة الالوان (W2, B4, R6)، بكم طريقة يمكن اختيار (5) كرات مكونة من (B2, R3)؟

الحل:

- طرق اختيار 3 كرات حمراء من 6 هو $\binom{6}{3} = 20$ طريقة

$$C_r^n = C_3^6 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.\,(3.2.1)} = 20$$

- طرق اختيار 2 كرتين سوداوين من 4 هو $\binom{4}{2} = 6$ طرق

$$C_r^n = C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.\,(2.1)} = \frac{12}{2} = 6$$

بذلك سيكون عدد الطرق الممكنة لاختيار 5 كرات (3منها حمراء و 2 سوداء) = 6*20 =120 طريقة .

مثال: **مدرسة فيها ٦ مدرسات و ٣ مدرسين نريد اختيار لجنة تتكون من ٤ اعضاء.**

أ. كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن اختيارها ؟

بـ كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن اختيارها بحيث تحتوي اللجنة على ٣ مدرسات ومدرس واحد.؟

$$C_r^n = C_4^9 = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

بالتعويض نجد:

$$C_r^n = C_4^9 = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9.8.7.6.5!}{4.3.2.1.5!} = 126$$

ب- سيتم هنا استخدام قانون التوافيق اولا لكلا اللجنتين ثم بعد ذلك سيتم استخدام قانون الضرب باعتبار الحدثين مستقلين.

اختيار ٣ مدرسات

$$C_r^n = C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.3.2.1} = 20$$

اختيار مدرس من ٣

$$C_r^n = C_1^3 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{3.2.1}{2.1} = 3$$

من قاعدة الضرب فان عدد اللجان التي يمكن اختيارها بحيث تحوي ٣ مدرسات ومدرس واحد هي

$$C_3^6 \times C_1^3 = 20 \times 3 = 60$$

نستنتج ان :

التباديل: هو عدد الطرق الممكنة لترتيب n عنصراً في r مكان

5P3=5*4*3=60

10P2=10*9=90

5P5=5*4*3*2*1=120

nPn=n!

nP1=n

اما التوافيق: فهو عدد الطرق الممكنة لاختيار r عنصر من عدد n من العناصر.

$$5C3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$$

$$nCn=1\ ,\ nC0=1\ ,nC1=1, 10C8=10C2,\ =\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{10\times9}{2\times1}$$

بعض خواص الاحتمال

1) $P(E)+P(\bar{E})=1$ 2) $0 \le P(E) \le 1$ 3) $\sum P(E_i)=1$

مثال: صندوق يحتوي على 6كرات حمراء ، 4 بيضاء ، و 5 صفراء ، سحبت من كرة عشوائيا، ما هو احتمال ان تكون : حمراء؟، بيضاء؟، صفراء؟، غير حمراء؟ مستخدما خواص الاحتمال.

الحل:

P(R)= 6/15 = 0.4 ; $P(\bar{R})=1-P(R)=1-0.4=0.6$

P(Y)= 5/15 = 0.334

P(W)= 4/15 = 0.267

P(R)+P(W)+P(Y) = 6/15+5/15+4/15 =15/15 = 1.0

قوانين الاحتمال

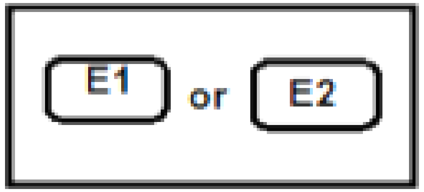
أ- قانون الجمع:

1) اذا كان الحدثان E1 و E2 حدثان متنافيان، فان احتمال حدوث أي منهما يكون:

$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$ Or $P(E_1+..+E_n)=P(E_1)+\cdots+P(E_n)$

وكما مبين **بالمثال السابق**

$$P(W+Y)=P(W)+P(Y)=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{9}{15}=0.6$$



2) اذا كان الحدثان E1 و E2 حدثان غير متنافيان، فان احتمال حدوث أي منهما يكون:

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 . E_2)$$

حيث ان $P(E_1 . E_2)$ يمثل احتمال حدوثهما معا، وان $P(E_1 + E_2)$ يمثل احتمال حدوث أي منهما

مثال: اذا كان احتمال اصابة الهدف من قبل الرامي A هو (4/1)، ومن قبل الرامي B هو (5/2)، فاذا صوب كلاهما نحو الهدف، ما احتمال اصابة الهدف؟

الحل: يصاب الهدف في كل من الحالات الاتية:

- ان يصيبه الرامي A فقط. - ان يصيبه الرامي B فقط. - ان يصيبه كل منهما.

P(A)=1/4= 0.25 ; P(B)= 2/5= 0.4 ; P(A.B)=P(A)*P(B)=0.25*0.4=0.10

P(A+B) = P(A)+P(B)- P(A.B) = 0.25+0.4 – 0.1 =11/20=0.55

ب- قانون الضرب:

1) اذا كانت الحوادث مستقلة، فاحتمال حدوثها معا هو:

$$P(E_1.E_2) = P(E_1).P(E_2)$$

لنعود الى **مثالنا السابق، الرامين مستقلين عن بعضهما**، فما هو احتمال انهما يصيبا الهدف؟ او انهما لا يصيبا الهدف؟

الحل: ان يصيبا الهدف

$$P(E_1.E_2) = P(E_1).P(E_2) = 0.25 * 0.4 = 0.100$$

وان لا يصيبا الهدف:

$$P(\bar{E}_1.\bar{E}_2) = P(\bar{E}_1).P(\bar{E}_2) = 0.75 * 0.6 = 0.45$$

2) اذا كانت الحوادث غير مستقلة، فاحتمال حدوثهما معا هو:

$$P(E_1.E_2) = P(E_1).P(E_2|_{E_1})$$

مثال: تتألف الشعبة من 25 طالبا و 10 طالبات، فاذا اختير 3 اسماء عشوائيا وعلى التوالي ، ما هو احتمال ان تكون الاسماء الثلاثة من الذكور؟

الحل:

$$\boldsymbol{P(E_1.E_2.E_3) = P(E_1).P(E_2|_{E_1}).P(E_3|_{E_1,E_2}) = \left(\frac{25}{35}\right).\left(\frac{24}{34}\right).\left(\frac{23}{33}\right) = \frac{13800}{39270} = 0.3514133}$$

الاحتمال الشرطي

اذا كان الحدثان A و B في فضاء العينة فان احتمال وقوع الحدث A مسبوقا بوقوع الحدث B هو :

$$P(A|_B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad ; \qquad P(B) > 0$$

مثال: صندوق فيه 6 كرات حمراء و 4 سوداء ، فاذا سحبت كرتان على التوالي وبدون ارجاع، ما هو احتمال ان تكون الكرة الثانية حمراء مع العلم ان الكرة الاولى كانت حمراء ايضا؟

الحل:

$$P(R_1.R_2) = P(R_1).P(R_2) = \frac{6}{10} * \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(R_2|_{R_1}) = \frac{P(R_1.R_2)}{P(R_1)} = \frac{\left(1/3\right)}{\left(6/10\right)} = \frac{5}{9}$$

الاحتمال والتحليل التوافقي:

مثال: صندوق فيه 8 كرات حمراء و 9 سوداء و 3 بيضاء، فاذا سحبت 3كرات على التوالي وبدون ارجاع،
ما هو احتمال ان تكون:

- الكرات الثلاثة حمراء ،
- واحدة من كل لون،
- الكرات الثلاثة بيضاء،
- على الاقل 1 بيضاء،
- كرتان حمراء وواحدة بيضاء،
- بالترتيب (R1, W2, B3) .

الحل:

1) الطريقة الاولى

- $P(R_1.R_2.R_3) = P(R_1).P(R_2|_{R_1}).P(R_3|_{R_1.R_2}) = \left(\frac{8}{20}\right).\left(\frac{7}{19}\right).\left(\frac{6}{18}\right) = \frac{336}{6840} = \frac{14}{285} = 0.0491$

وهكذا لباقي المطاليب

2) طريقة التوافيق

- $P(R_1.R_2.R_3) = P(3R) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{285}$
- $P(3W) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140}$
- $P(2R.\ 1W) = \frac{\binom{8}{2}\binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{7}{45}$

- على الاقل واحدة بيضاء يمكن ايجادها بأحد الطريقتين

نوجد الكرات غير البيضاء

$$P(\overline{W}) = \frac{\binom{20-3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{57}$$

نوجد المطلوب

$$P(1W, or\ 2w, or\ 3w) = P(1w) + P(2w) + P(3w)$$

$$= 1 - P(\overline{W}) = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$$

او بالطريقة

$$P(1w) + P(2w) + P(3w) = P(1w2\overline{w}) + P(2w1\overline{w}) + P(3w)$$

$$= \frac{\binom{3}{1}\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{1}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{17}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{23}{57}$$

- $P(1R1W1B) = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{18}{95}$

- $P(R_1.W_2.B_3) = P(R_1).P(W_2|_{R_1}).P(B_3|_{R_1.W_2}) = \left(\frac{8}{20}\right).\left(\frac{3}{19}\right).\left(\frac{9}{18}\right) = \frac{3}{95}$

الاحتمال بطريقة الرسم (شجرة القرار)

مثال: صندوق يحتوي على ***3*** كرات حمراء و***2*** زرقاء و***1*** خضراء، سحبت منه كرتان عشوائيا وعلى التوالي، ما هو احتمال:-

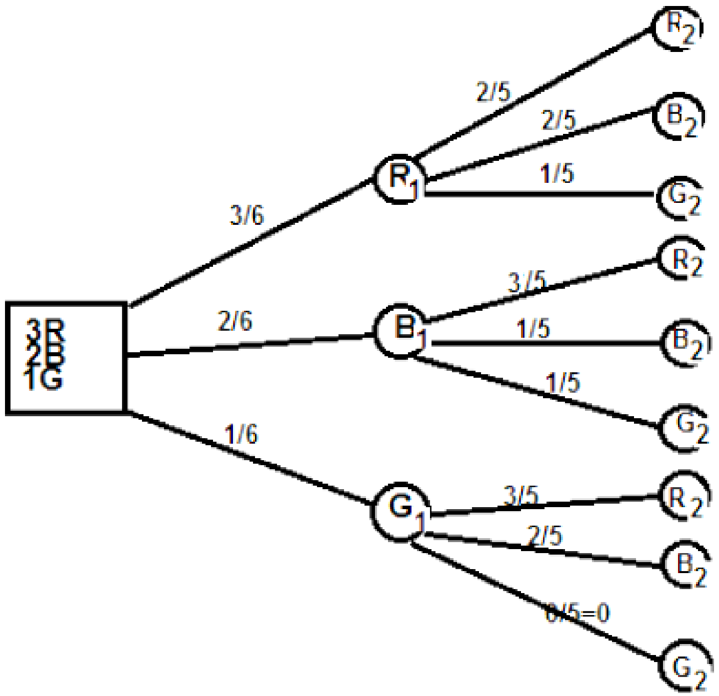
أ- أن تكون الكرتان زرقاوان؟

ب- أن تكون الأولى زرقاء والثانية خضراء؟

ت- أن لا تكون أي منهما حمراء؟

ث- أن تكون الثانية حمراء؟

الحل:



a- $P(B_1 \cap B_2) = 2/6 \times 1/5 = 2/30 = 0.0667$

b- $P(B_1 \cap G_2) = 2/6 \times 1/5 = 2/30 = 0.0667$

c- $P(G_1G_2) + P(B_1G_2) + P(G_1B_2) + P(B_1B_2)$

$= 0 + 2/30 + 2/30 + 2/30 = 6/30 = 0.20$

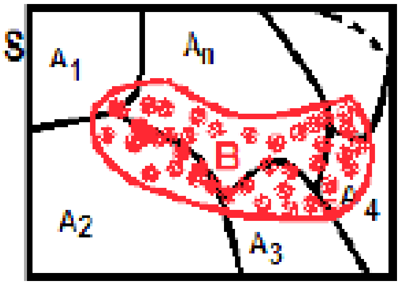
d- $P(G_1R_2) + P(B_1R_2) + P(R_1R_2) =$

$= 1/6 \times 3/5 + 2/6 \times 3/5 + 3/6 \times 2/5$

$= 3/30 + 6/30 + 6/30$

$= 0.50$

نظرية باير Bay's Theorm

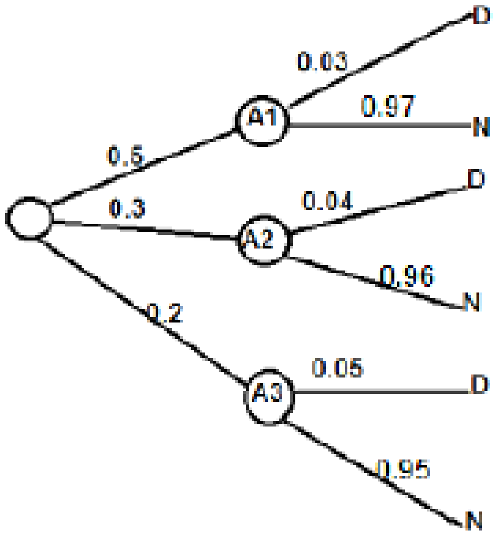


اذا كان $A_1, A_2, A_3,\dots, A_n$ تمثل حوادث متنافية او شاملة وان B هو حدث معين بحيث ان احتماله لا يساوي صفر ($P(B) \neq 0$) فان:

$$P(A_i|_B) = \frac{P(A_i).P(B|_{A_i})}{P(A_1).P(B|_{A_1}) + P(A_2).P(B|_{A_2}) + \cdots + P(A_n).P(B|_{A_n})}$$

مثال: مصنع يتكون من ثلاثة أقسام A_1, A_2, A_3 ، ينتج القسم A_1 50% من الإنتاج الكلي من المصابيح ومتوسط نسبة المعاب له 3% ، و ينتج القسم A_2 30% من الإنتاج الكلي ومتوسط نسبة المعاب له 4% بينما ينتج القسم A_3 20% من الإنتاج الكلي ومتوسط نسبة المعاب له 5%. فإذا أخذنا مصباحا بصورة عشوائية ودون تحيز من إنتاج المصنع كله ووجد بأنه معاب، اوجد احتمال أن هذا المصباح المعاب هو من إنتاج القسم A_1 ؟

الحل:



نفرض ان الحدث D يمثل ان المصباح معاب

نفرض ان الحدث N يمثل ان المصباح صالح

$$P(D) = P(A1).P(D|A1) + P(A2).P(D|A2) + P(A3).P(D|A3)$$

احتمال ان المصباح المعاب من انتاج القسم A1 هو $P(A1|D) =$

$$P(A1|D) = \frac{P(A1).P(D|A1)}{P(D)} = \frac{0.5 \times 0.03}{0.5\times0.03+0.3\times0.04+0.2\times0.05}$$

$$= \frac{0.015}{0.037} = \frac{15}{37} = 0.40541$$